



Etude analytique et numérique de la convection naturelle dans une couche poreuse de Brinkman doublement diffusive

A. Amahmid^{a,*}, M. Hasnaoui^a, P. Vasseur^b

^a Département de Physique, Faculté des Sciences Semlalia, B.P. S-15, Marrakech, Morocco

^b Ecole Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, Succursale Centre-ville, Montréal (P.Q.), Canada H3C 3A7

Reçu 23 janvier 1997; sous forme finale 27 avril 1998

Résumé

On étudie analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. On utilise le modèle de Brinkman et on considère la situation particulière où les forces de volume thermiques et solutales sont opposées et de même intensité. Une solution analytique, basée sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle, est développée pour des rapports de forme A de la matrice poreuse suffisamment élevés. Les nombres de Rayleigh critiques au delà desquels les mouvements convectifs sont possibles sont déterminés analytiquement en fonction des nombres de Lewis Le et de Darcy Da . Les résultats présentés couvrent les gammes suivantes: $0 < R_T < 10^3$, $0 < Le < 10^3$ et $0 < Da < 10$. Les résultats du modèle de Darcy et ceux du milieu fluide ($Pr \geq 0.5$) sont correctement prédits par le modèle de Brinkman respectivement pour les faibles et grands nombres de Darcy Da . L'étude numérique n'a permis d'obtenir que les solutions monocellulaires malgré la multiplicité des solutions démontrée analytiquement. © 1999 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Abstract

Analytical and numerical study of double-diffusive natural convection in a Brinkman porous layer

Thermosolutal natural convection in a vertical porous layer submitted to uniform fluxes of heat and mass is studied analytically and numerically. The Brinkman model is used in the particular situation where the solutal and thermal volumetric forces are opposite and equal. The analytical solution, based on the parallel flow approximation, is developed for sufficiently high values of the aspect ratio A of the porous matrix. The critical Rayleigh numbers above which convective flows are possible are predicted analytically as function of the Lewis Le and Darcy Da numbers. The results presented here cover the following ranges: $0 < R_T < 10^3$, $0 < Le < 10^3$ and $0 < Da < 10$. The limiting results of the Darcy model and those of the fluid medium ($Pr \geq 0.5$) are correctly predicted by the Brinkman model respectively for weak and high values of Da . Only monocellular solutions have been obtained numerically despite the multiplicity of solutions demonstrated analytically. © 1999 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Nomenclature

A rapport de forme, H/L'
 D diffusivité massique
 Da nombre de Darcy, K/L'^2
 g accélération de la pesanteur

H' hauteur de la couche
 j' flux de masse (par unité d'aire)
 K perméabilité du milieu poreux
 L' épaisseur de la couche
 Le nombre de Lewis, α/D
 N rapport des forces de volume, $\beta_S \Delta S' / \beta_T \Delta T'$
 Nu nombre de Nusselt, équation (8)
 Pr nombre de Prandtl, α/v
 q' flux de chaleur (par unité d'aire)

* Corresponding author.

R_S nombre de Rayleigh–Darcy solutal, $R_T Le N$
 R_T nombre de Rayleigh–Darcy thermique,
 $g\beta_T Kq' L^2 / \lambda \alpha v$
 R_{TC} valeur critique de R_T
 R_{TF} nombre de Rayleigh thermique pour un fluide,
 R_T / Da
 R_{TFC} valeur critique de R_{TF}
 S concentration adimensionnelle, $(S' - S'_0) / \Delta S'$
 Sh nombre de Sherwood, équation (9)
 $\Delta S'$ concentration caractéristique, $j' L' / D$
 t temps adimensionnel, $t' \alpha / L^2 / \sigma$
 T température adimensionnelle, $(T' - T'_0) / \Delta T'$
 (u, v) vitesses adimensionnelles dans les directions
 (x, y) ; $(u' L' / \alpha, v' L' / \alpha)$
 (x, y) coordonnées adimensionnelles, $(x' / L', y' / L')$.

Symboles grecs

α diffusivité thermique
 β_S coefficient d'expansion massique
 β_T coefficient d'expansion thermique
 $\Delta T'$ température caractéristique, $q' L' / \lambda$
 ε porosité normalisée, ε' / σ
 ε' porosité du milieu poreux
 λ conductivité thermique
 ν viscosité cinématique du fluide
 ρ masse volumique du fluide
 ρ_a masse volumique adimensionnelle locale du
 fluide, $[(\rho - \rho_0) / \rho_0 \beta_T \Delta T] = (S - T)$
 $(\rho c)_f$ chaleur spécifique du fluide
 $(\rho c)_p$ chaleur spécifique du milieu poreux
 σ rapport des chaleurs spécifiques, $(\rho c)_p / (\rho c)_f$
 Ψ fonction de courant adimensionnelle, Ψ' / α
 Ω vorticité adimensionnelle, $\Omega' L^2 / \alpha$.

Indices

ext valeur extrême
 max valeur maximale
 min valeur minimale
 S solutal
 T thermique
 0 état de référence.

Exposant

' variable dimensionnelle.

1. Introduction

La convection naturelle induite par des variations spatiales combinées de température et de concentration est communément appelée double diffusion ou convection thermosolutale. Comparée à la convection purement thermique, elle reste moins documentée malgré l'intérêt pratique de ce phénomène dans diverses applications en ingénierie. On peut citer par exemple la diffusion des contaminants dans les sols avoisinant les eaux polluées,

le séchage des produits agricoles et pharmaceutiques, la diffusion des substances radioactives dans les dépôts souterrains réservés aux déchets nucléaires, la diffusion des éléments chimiques dans les lits poreux réactifs (gazéification du charbon), le refroidissement par évaporation des systèmes à haute température, etc. . .

La plupart des études menées sur la convection naturelle thermosolutale induite dans des milieux poreux confinés sont relatives à des cavités rectangulaires. Parmi ces études, on peut mentionner l'investigation numérique de Trevisan et Bejan [1] relative à une cavité carrée poreuse avec des parois verticales maintenues à des températures et des concentrations constantes et des parois horizontales adiabatiques et imperméables. Une analyse des ordres de grandeur a été également utilisée pour traiter ce problème dans les cas limites des écoulements entraînés par les effets thermiques ou massiques. Les résultats de cette analyse ont été trouvés en accord avec les calculs numériques. Bien que le repos soit une solution exacte pour le problème dans le cas où les forces de convections thermiques et massiques sont égales et engendrent des effets opposés, il a été trouvé que l'écoulement du fluide était possible au delà d'un certain nombre de Rayleigh critique quand $Le \neq 1$. Cependant, le mouvement du fluide disparaît complètement pour $Le = 1$. Les résultats trouvés par Charrier-Mojtabi et al. [2] et Gobin et Bennacer [3], en étudiant respectivement la convection thermosolutale dans des cavités poreuses et fluides, soumises à des conditions aux limites identiques à celles décrites dans la référence [1], sont en accord avec ces observations. En effet, ces auteurs ont montré qu'il existe une valeur critique du nombre de Rayleigh au delà de laquelle les mouvements convectifs sont possibles lorsque les forces thermiques et massiques sont opposées et possèdent des intensités égales. La valeur critique du nombre de Rayleigh tend vers l'infini quand Le tend vers 1. Shyy et Chen [4] ont de leur part montré que le mouvement convectif est possible dans le cas où les effets thermiques et massiques sont opposés même si les forces de volume correspondantes sont égales. Trevisan et Bejan [5] ont de leur côté étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse rectangulaire dont les faces verticales sont soumises à des flux de chaleur et de masse uniformes et celles horizontales sont considérées adiabatiques et imperméables. Une solution analytique a été présentée en régime de couche limite pour $Le = 1$. Par contre, une méthode de similitude a été utilisée pour $Le > 1$ dans le cas d'un écoulement doublement diffusif dominé par les effets thermiques. Toujours en considérant des effets dominants de la température sur l'écoulement, Trevisan et Bejan [6] ont étudié la convection thermosolutale induite dans une cavité rectangulaire chauffée par le bas en imposant des températures et des concentrations sur les parois horizontales. Rosenberg et Spera [7] ont étudié numériquement la convection thermosolutale en régimes

transitoire et stationnaire dans une cavité poreuse carrée chauffée par le bas et soumise à des conditions aux limites massiques et à des perturbations initiales variées. Récemment, Alavyoon [8] a reconsidéré la configuration étudiée par Trevisan et Bejan [5] et il a proposé des solutions analytique et numérique dans le cas où les forces de volume thermiques et solutales coopèrent. Une analyse d'échelle a été également appliquée au problème en considérant des écoulements de type couche limite. La solution analytique développée est basée sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle et elle a été trouvée en bon accord avec les calculs numériques quand le rapport de forme devient assez élevé. Ces auteurs ont montré aussi dans cette étude qu'un choix inapproprié des conditions dans la zone centrale de la cavité est la cause de la restriction de la validité de la solution analytique développée par Trevisan et Bejan [5] uniquement au cas $Le = 1$. Le même problème a été repris par Alavyoon et al. [9] dans le cas où les forces de volume thermiques et solutales ont des effets opposés. Ils ont montré que pour une combinaison donnée des paramètres de contrôle, le problème peut avoir plusieurs solutions. Par ailleurs, il a été montré qu'il est possible d'obtenir une solution fortement convective même dans le cas où les forces de volume thermiques et solutales sont égales, sachant que pour cette situation particulière le repos est une solution exacte du problème. Mamou et al. [10] ont étudié numériquement la double diffusion dans une cavité poreuse de forme carrée en imposant les mêmes conditions aux limites que celles considérées dans la référence [5]. Ils ont montré que pour une même combinaison des paramètres, le problème peut avoir plusieurs solutions quand les forces thermiques et massiques sont opposées. Ces auteurs [11] ont aussi étudié numériquement et analytiquement la convection naturelle thermosolutale dans une couche poreuse inclinée soumise, sur ses longs côtés, à des flux de chaleur et de masse uniformes. La solution analytique a été développée en se basant sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle dans la région centrale de la cavité. Un bon accord a été observé entre les résultats obtenus par les deux méthodes. Les nombres de Rayleigh critiques correspondant à l'apparition des mouvements convectifs ont été également déterminés dans le cas limite d'une couche horizontale.

Il convient de noter que la plupart des études concernées par la double diffusion dans les milieux poreux sont réalisées en utilisant le modèle de Darcy qui ne prend pas en considération la condition de non glissement sur les frontières solides. C'est pourquoi on s'est intéressé dans la présente étude au modèle de Brinkman qui permet de satisfaire pleinement la condition de non glissement sur les parois solides en raison des termes de diffusion visqueux présents dans les équations correspondant à ce modèle. Ce dernier a été utilisé par Tong et Subramanian [12] pour étudier la convection naturelle thermique dans une cavité rectangulaire avec des parois horizontales adiabatiques et des parois verticales maintenues à des

températures constantes. Les équations de la couche limite ont été résolues par la méthode d'Oseen modifiée. En examinant l'influence de la condition de non glissement du fluide sur les parois solides de la cavité, ils ont trouvé que l'écoulement peut être caractérisé par le paramètre $E = R Da/A$. Dans cette expression, R , Da et A désignent respectivement le nombre de Rayleigh, le nombre de Darcy et le rapport de forme de la cavité. Ainsi, pour des faibles valeurs de E ($E < 10^{-4}$) les résultats du modèle de Darcy concordent bien avec ceux du modèle de Brinkman avec une différence inférieure à 1%. Par contre, pour des valeurs élevées de E , le taux de transfert de chaleur a été trouvé nettement inférieur à celui prédit par le modèle de Darcy. Ils ont constaté aussi que le fait de satisfaire la condition de non glissement du fluide dans le modèle de Brinkman permet d'obtenir des profils de vitesse plus proches de la réalité physique. Ce même problème a été considéré ensuite par Lauriat et Prasad [13]. Leur étude a montré qu'au delà de $Da = 10^{-5}$, les champs de vitesse et de température sont significativement modifiés, les régimes d'écoulement sont décalés et les taux de transfert de chaleur sont réduits. Le modèle de Brinkman a été également adopté par Vasseur et Robillard [14] pour étudier analytiquement et numériquement la convection naturelle thermique dans la configuration précédente en imposant un flux de chaleur uniforme au niveau des parois verticales. Ils ont trouvé que l'effet des frontières solides sur l'écoulement et le transfert de chaleur est non négligeable quand les nombres de Darcy sont élevés. Dans les limites des grands et faibles nombres Da , leurs résultats coïncident respectivement avec ceux d'un milieu fluide pur et du modèle de Darcy. Le modèle de Brinkman a été aussi utilisé par Vasseur et Robillard [15] pour étudier la convection naturelle induite dans une couche poreuse horizontale. Différentes conditions aux limites hydrodynamiques ont été imposées sur les parois supérieure et inférieure de la couche. Leurs résultats analytiques concordent bien avec ceux limites du milieu fluide et du modèle de Darcy respectivement quand $Da \rightarrow +\infty$ et $Da \rightarrow 0$. Plus récemment, Goyeau et al. [16] ont adopté le modèle de Brinkman pour étudier la convection naturelle thermosolutale au sein d'une cavité rectangulaire poreuse en maintenant constantes les températures et les concentrations sur ses parois verticales. Cette étude a montré que l'augmentation du nombre de Darcy conduit à des comportements convectifs nettement différents de ceux caractéristiques du régime de Darcy.

La présente investigation est une contribution à l'enrichissement des connaissances relatives aux problèmes de la double diffusion dans les milieux poreux. On étudie analytiquement et numériquement la convection thermosolutale dans une cavité poreuse verticale de grand rapport de forme. Le modèle de Brinkman est utilisé afin de prendre en considération l'effet du nombre de Darcy sur les écoulements du fluide et les transferts thermiques et massiques. On s'intéresse particulièrement au cas où

les forces de volume thermiques et solutales sont opposées et de même intensité. Les nombres de Rayleigh critiques caractérisant l'apparition des mouvements convectifs sont calculés analytiquement en fonction des nombres de Lewis Le et Darcy Da .

2. Configuration étudiée et modèle mathématique

Le problème étudié est présenté sur la figure 1. Il s'agit d'une couche poreuse de Brinkman de hauteur H' et de largeur L' dont les faces verticales sont soumises à des flux de chaleur q' et de masse j' (par unité de surface). Les faces horizontales sont adiabatiques et imperméables. On suppose que les variations de la masse volumique en fonction de la température et de la concentration sont décrites par l'équation d'état $[\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T' - T'_0) - \beta_S(S' - S'_0))]$. En prenant les variables adimensionnelles suivantes: $(x, y) = (x'/L', y'/L')$, $(u, v, \Psi) = (u'L'/\alpha, v'L'/\alpha, \Psi'/\alpha)$, $t = t'\alpha/L'^2\sigma$, $(T, S) = [(T' - T'_0)/\Delta T', (S' - S'_0)/\Delta S']$ (où T'_0 et S'_0 sont la température et la concentration à l'origine du système de coordonnées et $\Delta T' = q'L'/\lambda$ et $\Delta S' = j'L'/D$ des différences de températures et de concentrations caractéristiques respectivement), les équations de conservation décrivant les phénomènes de transfert au sein de la cavité s'écrivent sous la forme

$$\nabla^2 \Psi = Da \nabla^4 \Psi - R_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (3)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4)$$

En termes adimensionnés les conditions frontières pour le système considéré dans la présente étude sont

Sur les faces verticales en $x = \pm 1/2$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 1. \quad (5)$$

Sur les faces horizontales en $y = \pm A/2$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Les paramètres adimensionnels apparaissant dans les équations et les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} R_T &= (g\beta_T K q' L'^2) / (\lambda \alpha v) \quad Le = \alpha / D \\ N &= \beta_S \Delta S' / \beta_T \Delta T' \quad Da = K / L'^2 \\ A &= H' / L' \quad \varepsilon = \varepsilon' / \sigma \end{aligned} \quad (7)$$

où R_T et Le représentent respectivement le nombre de Rayleigh et le nombre de Lewis. Da désigne le nombre

de Darcy, N correspond au rapport des forces de volume et ε est la porosité modifiée du milieu poreux. Le paramètre A représente le rapport de forme de la cavité.

Comme nous nous intéressons essentiellement au transfert de chaleur et de masse, nous les exprimons respectivement par les grandeurs adimensionnées suivantes

$$Nu = \frac{q' L' / \lambda}{\Delta T'} = \frac{1}{T\left(\frac{1}{2}, 0\right) - T\left(-\frac{1}{2}, 0\right)} \quad (8)$$

$$Sh = \frac{j' L' / D}{\Delta S'} = \frac{1}{S\left(\frac{1}{2}, 0\right) - S\left(-\frac{1}{2}, 0\right)} \quad (9)$$

où $\overline{\Delta T'} = [T'(L'/2, 0) - T'(-L'/2, 0)]$ et $\overline{\Delta S'} = [S'(L'/2, 0) - S'(-L'/2, 0)]$ représentent respectivement les différences de température et de concentration entre les deux parois verticales. Ces différences sont évaluées arbitrairement à mi-hauteur de la cavité car, comme on le montrera par la suite, elles sont indépendantes de l'altitude y .

3. Solution analytique

On considère dans cette section une solution analytique des équations (1)–(4), soumises aux conditions aux limites (5) et (6), pour le cas particulier où les forces de volume engendrées par les champs de température et de concentration sont égales et opposées ($N = -1$). Dans la limite d'une cavité de grande extension ($A \gg 1$) le problème se simplifie considérablement avec l'hypothèse d'un écoulement parallèle pour lequel on a

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \Psi(x), \quad T(x, y) = C_T y + \theta_T(x), \\ S(x, y) &= C_S y + \theta_S(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Cette approximation a été déduite par Cormack et al. [17], sur la base de la théorie des développements asymptotiques, dans le cas d'une couche fluide horizontale de grande extension. Dans le cas de la convection naturelle thermosolutale au sein d'une cavité verticale, ce type d'approximation a été utilisé avec succès par Alavyoon [8] et Mamou et al. [11, 18].

Les équations (1) à (3) deviennent:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = Da \frac{d^4 \Psi}{dx^4} - R_T \left(\frac{\partial \theta_T}{\partial x} - \frac{\partial \theta_S}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$-C_T \frac{d\Psi}{dx} = \frac{d^2 \theta_T}{dx^2} \quad (12)$$

$$-C_S \frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{Le} \frac{d^2 \theta_S}{dx^2} \quad (13)$$

Les équations (12) et (13) avec les conditions aux limites (5) et (6) donnent:

$$\frac{d\theta_T}{dx} = -C_T \Psi + 1 \tag{14}$$

$$\frac{d\theta_S}{dx} = -Le C_S \Psi + 1. \tag{15}$$

En utilisant les équations (14) et (15), (11) devient:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = Da \frac{d^4 \Psi}{dx^4} - R_T (Le C_S - C_T) \Psi. \tag{16}$$

En fait, une étude préliminaire a montré que la condition: $R_T (Le C_S - C_T) > 0$ (17)

est nécessaire pour avoir une solution autre que le repos. On pose:

$$\omega^2 = R_T (Le C_S - C_T). \tag{18}$$

En cherchant une solution de la forme: $\Psi(x) = \exp(\lambda x)$, la solution générale peut être mise sous la forme:

$$\Psi(x) = \Psi_c (\cos(\lambda_2 x) - \alpha_0 \cosh(\lambda_1 x)) \tag{19}$$

où la valeur de Ψ_c reste à déterminer et

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4 Da \omega^2} + 1}{2 Da}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4 Da \omega^2} - 1}{2 Da}}. \tag{20}$$

Les conditions aux limites sur Ψ et sa dérivée en $x = \pm 1/2$ imposent:

$$\alpha_0 = \frac{\cos(\lambda_2/2)}{\cosh(\lambda_1/2)} \tag{21}$$

$$\lambda_1 \tanh(\lambda_1/2) = -\lambda_2 \tan(\lambda_2/2). \tag{22}$$

La résolution numérique de l'équation (22) permet de déterminer les constantes λ_1 , λ_2 et ω . Elles ne dépendent que de Da et elles sont reliées par les relations:

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \frac{1}{Da} \tag{23}$$

$$\omega^2 = \lambda_2^2 (Da \lambda_2^2 + 1). \tag{24}$$

L'analyse graphique de la relation (22) montre l'existence d'un nombre infini de solutions. On montre facilement que λ_2 vérifie:

$$(2n+1)\pi < \lambda_2 < (2n+2)\pi \tag{25}$$

où n est un nombre entier.

De plus pour chaque valeur de n , on a une seule valeur de λ_2 (donc un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \omega)$ unique) solution de (22). Les solutions vérifiant (25) seront notées par la suite de type n . Un traitement graphique de la relation (19) montre que les solutions de type n sont constituées de $(2n+1)$ cellules. L'écoulement monocellulaire correspond ainsi à $n=0$. Notons que l'inégalité (25) indique aussi que les constantes λ_1 , λ_2 et ω augmentent avec n donc avec le nombre de cellules constituant l'écoulement.

La vitesse s'exprime par:

$$v(x) = \Psi_c (\lambda_2 \sin(\lambda_2 x) + \alpha_0 \lambda_1 \sinh(\lambda_1 x)). \tag{26}$$

On utilise les relations (14) et (15) pour déterminer T et S :

$$T(x) = C_T y + x - C_T \Psi_c \left[\frac{\sin(\lambda_2 x)}{\lambda_2} - \alpha_0 \frac{\sinh(\lambda_1 x)}{\lambda_1} \right] \tag{27}$$

$$S(x) = C_S y + x - C_S Le \Psi_c \left[\frac{\sin(\lambda_2 x)}{\lambda_2} - \alpha_0 \frac{\sinh(\lambda_1 x)}{\lambda_1} \right]. \tag{28}$$

Pour la détermination des constantes C_T et C_S , on tient compte du fait que les quantités de chaleur et de masse traversant la section horizontale sont nulles [5]:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(vT - \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx = 0 \tag{29}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(vS - \frac{1}{Le} \frac{\partial S}{\partial y} \right) dx = 0. \tag{30}$$

Il est à noter que les équations (29) et (30) résultent des conditions aux limites de type Neuman imposées sur les parois de la cavité pour la température et la concentration.

En substituant les équations (26)–(28) dans les équations (29) et (30) on peut montrer facilement que:

$$C_T = \frac{\alpha_2 \Psi_c}{1 + \alpha_1 \Psi_c^2} \tag{31}$$

$$C_S = \frac{\alpha_2 Le \Psi_c}{1 + \alpha_1 Le^2 \Psi_c^2} \tag{32}$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \alpha_0^2 + \frac{\sin(\lambda_2)}{\lambda_2} \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right] \tag{33}$$

$$\alpha_2 = 2 \frac{\sin\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \tag{34}$$

$\alpha_1 > 0$ puisque $\lambda_1 > \lambda_2$.

Ψ_c est déterminé, en utilisant l'équation (18), par la relation suivante:

$$1 + \alpha_1 (Le^2 + 1) \Psi_c^2 + \alpha_1^2 Le^2 \Psi_c^4 = \frac{\alpha_2 (Le^2 - 1) R_T \Psi_c}{\omega^2}. \tag{35}$$

On peut montrer graphiquement en traçant $R_T = f(\Psi_c)$ qu'il existe un nombre de Rayleigh critique R_{TC} au dessous duquel l'équation (35) n'admet pas de solution:

$$R_{TC} = \frac{2\omega^2 \alpha_1 \Psi_{cr} (2\alpha_1 Le^2 \Psi_{cr}^2 + Le^2 + 1)}{\alpha_2 (Le^2 - 1)}. \tag{36}$$

Ψ_{cr} est la valeur de Ψ_c pour $R_T = R_{TC}$. Elle est donnée par:

$$\Psi_{cr} = \pm \frac{1}{Le \sqrt{6\alpha_1}} \left[\sqrt{(Le^2 + 1)^2 + 12 Le^2} - (Le^2 + 1) \right]^{1/2} \tag{37}$$

or $R_T > 0$, donc Ψ_c et Ψ_{cr} sont de même signe que $\alpha_2(Le^2 - 1)$.

Pour un écoulement monocellulaire ($n=0$), $\alpha_2 > 0$, donc C_T, C_S, Ψ_c et Ψ_{cr} sont positifs pour $Le > 1$ et négatifs pour $Le < 1$.

Rappelons que les constantes α_1, α_2 et ω dépendent du mode d'écoulement considéré (i.e. dépendent du nombre de cellules présentes). Ainsi, chaque type n de solution admet un nombre de Rayleigh critique au dessous duquel il ne peut exister. Des traitements numériques de la relation (36) ont montré que R_{TC} minimal correspond à un écoulement monocellulaire ($n=0$). Il s'ensuit que pour $R_T < R_{TC}(n=0)$, il n'existe pas de solution convective de type écoulement parallèle.

Nous signalons que pour $R_T > R_{TC}$, l'équation (35) admet deux solutions pour Ψ_c ($\Psi_{c \min}$ et $\Psi_{c \max}$ avec $|\Psi_{c \min}| < |\Psi_{c \max}|$) ce qui implique l'existence de deux écoulements d'intensités différentes mais constitués d'un même nombre de cellules (l'écoulement le plus intense correspond à $\Psi_c = \Psi_{c \max}$). Une méthode itérative est utilisée pour déterminer Ψ_c .

A l'aide des relations (8) et (9) on calcule Nu et Sh :

$$Nu = \frac{(1 + \alpha_1 \Psi_c^2)}{1 + \Psi_c^2 [\alpha_1 - \alpha_2^2]} \quad (38)$$

$$Sh = \frac{(1 + \alpha_1 Le^2 \Psi_c^2)}{1 + Le^2 \Psi_c^2 [\alpha_1 - \alpha_2^2]} \quad (39)$$

3.1. Cas de l'écoulement de Darcy $Da \ll 1$

Si on fait tendre Da vers 0, l'équation (23) montre que λ_1 tend vers $+\infty$, et d'après la relation (22):

$$\tan\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \rightarrow -\infty.$$

Ce qui donne

$$\lambda_2 \simeq \pi(1 + 2n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (40)$$

La relation (24) conduit à:

$$\omega \simeq \lambda_2 \simeq \pi(1 + 2n). \quad (41)$$

Dans ces conditions on a:

$$\alpha_0 \simeq 0, \quad \alpha_1 \simeq \frac{1}{2} \text{ et } \alpha_2 \simeq \frac{2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \quad (42)$$

Ainsi on retrouve les résultats de Mamou et al. [19] pour le cas de $Da = 0$:

$$R_{TC} = \frac{\omega^3 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \Psi_{cr} (Le^2 \Psi_{cr}^2 + Le^2 + 1)}{2(Le^2 - 1)} \quad (43)$$

$$\Psi_{cr} = \pm \frac{1}{Le \sqrt{3}} [\sqrt{(Le^2 + 1)^2 + 12 Le^2} - (Le^2 + 1)]^{1/2} \quad (44)$$

$$Nu = \frac{\omega^2 (2 + \Psi_c^2)}{2\omega^2 + \Psi_c^2 (\omega^2 - 8)} \quad (45)$$

$$Sh = \frac{\omega^2 (2 + Le^2 \Psi_c^2)}{2\omega^2 + Le^2 \Psi_c^2 (\omega^2 - 8)}. \quad (46)$$

Pour $\Psi(x)$ et $v(x)$ on obtient une concordance si on s'éloigne du voisinage immédiat des parois, c'est-à-dire des positions $x = \pm 1/2$. Dans ce cas on a:

$$\Psi(x) = \Psi_c \cos(\omega x) \quad (47)$$

$$v(x) = \omega \Psi_c \sin(\omega x). \quad (48)$$

En fait pour x voisin de $\pm 1/2$, la relation (22) indique bien que les deux termes de la relation (26) sont du même ordre. Cela provient de la condition de non glissement (i.e. vitesse nulle sur les parois solides) imposée dans le cas du modèle de Brinkman. Une telle condition n'est pas vérifiée dans le modèle de Darcy qui donne une vitesse maximale sur les parois [relation (48)]. Il faut noter que la zone de désaccord entre les deux modèles est d'autant plus étroite que Da tend vers 0. Il s'ensuit que les expressions de la température et de la concentration correspondant aux deux modèles concordent dans tout le domaine.

3.2. Cas de l'écoulement d'un fluide pur ($Da \gg 1$)

Quand Da tend vers ∞ , de la relation (23) on déduit que $\lambda_1 \simeq \lambda_2$ et l'équation (22) devient:

$$\tanh\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\lambda_1}{2}\right). \quad (49)$$

Donc λ_1 et λ_2 (et par là α_0, α_1 , et α_2) ne dépendent d'aucun paramètre une fois le mode d'écoulement n est fixé. Pour un écoulement monocellulaire ($n=0$):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4.73.$$

La relation (24) montre que:

$$\omega^2 = Da \lambda^4. \quad (50)$$

Si on remplace ω^2 dans l'équation (35) en utilisant le nombre de Rayleigh correspondant au milieu fluide: $R_{TF} = (R_T/Da)$, on obtient pour l'équation de Ψ_c :

$$1 + \alpha_1 (Le^2 + 1) \Psi_c^2 + \alpha_1^2 Le^2 \Psi_c^4 = \frac{\alpha_2 (Le^2 - 1) R_{TF} \Psi_c}{\lambda_1^4}. \quad (51)$$

Le nombre de Rayleigh critique R_{TFC} est déduit de l'équation (36):

$$R_{TFC} = \frac{R_{TC}}{Da} = \frac{2\lambda_1^4 \alpha_1 \Psi_{cr} (2\alpha_1 Le^2 \Psi_{cr}^2 + Le^2 + 1)}{\alpha_2 (Le^2 - 1)}. \quad (52)$$

Ce résultat peut être également déduit de la solution générale obtenue par Mamou et al. [18] pour le cas d'une couche verticale fluide doublement diffusive.

Il s'ensuit que, dans ce cas limite, l'écoulement et les

transferts de chaleur et de masse ne dépendent que de R_{TF} et Le . En fait pour $Da \gg 1$, on peut négliger le terme de gauche dans l'équation (1) et l'équation du mouvement devient indépendante de Da :

$$\nabla^4 \Psi - R_{TF} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0. \quad (53)$$

Rappelons que lorsqu'on utilise la vorticité Ω , l'équation du mouvement en régime stationnaire pour le milieu fluide est:

$$u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = Pr \nabla^2 \Omega + Pr R_{TF} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + N \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (54)$$

où:

$$\Omega = -\nabla^2 \Psi. \quad (55)$$

Si la condition d'écoulement parallèle est satisfaite [i.e. $u=0$ et $\Omega=\Omega(x)$], le terme de transport dans l'équation (54) (termes d'inertie de gauche) s'annule. Celle-ci se ramène alors à l'équation (53) régissant le milieu de Brinkman quand $Da \gg 1$. Dans cette limite, le modèle de Brinkman décrit le comportement de l'écoulement d'un milieu fluide en l'absence des forces d'inertie (i.e. sur la base des équations de Stokes).

4. Solution numérique

Pour la résolution numérique, on a adopté une technique similaire à celle de Vasseur et Robillard [14]. L'équation du mouvement est écrite sous forme transitoire en fonction de la vorticité Ω . Le système d'équations résolues s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega = Da \nabla^2 \Omega + R_T \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (56)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\Omega \quad (57)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (58)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (59)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (60)$$

La résolution numérique est effectuée à l'aide de la méthode ADI. Un schéma centré du second ordre est utilisé pour la discrétisation des équations. L'équation de Ψ [ quation (57)] est résolue par la méthode S.O.R. La sous relaxation de Ω dans la résolution de l'équation (56) a été trouvée très utile pour accélérer la convergence quand Da devient relativement élevé ($\geq 10^{-2}$). Le paramètre ε n'a pas d'importance en régime stationnaire, cependant on l'a utilisé comme facteur de relaxation pour accélérer la convergence particulièrement si Le est élevé (on tient à ce que le produit εLe soit voisin de 1).

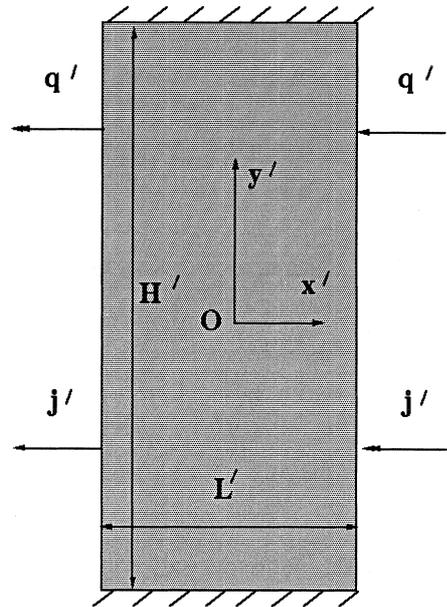


Fig. 1. Système  tudi .

Un maillage uniforme est utilisé. Le nombre de noeuds dépend des paramètres du problème (R_T , Le et Da) et peut atteindre 80×180 respectivement dans les directions x et y . Le programme élaboré est testé en prenant comme références les résultats de Mamou et al. [10] et Vasseur et Robillard [14]. Dans la plupart des cas les résultats obtenus par ces auteurs ont été reproduits avec des différences inférieures à 1.5%.

5. Discussion

5.1. Nombre de Rayleigh critique

Pour Le et Da donnés, R_{TC} augmente avec le mode d'écoulement n (résultats non présentés). Cette augmentation indique simplement que la plus petite valeur de R_{TC} est obtenue pour un écoulement monocellulaire ($n=0$). Des résultats similaires ont été reportés par Mamou et al. [19] en étudiant la double diffusion dans un milieu poreux de Darcy. Cependant, malgré le fait que les calculs analytiques ont montré que ces problèmes admettent plusieurs solutions, seuls les modes d'écoulements unicellulaires ($n=0$) ont pu être obtenus numériquement. Toutes les tentatives numériques faites pour $n \neq 0$, en prenant comme conditions initiales des solutions analytiques multicellulaires convergent vers une solution numérique monocellulaire. Une analyse de stabilité serait nécessaire pour confirmer l'existence physique ou mathématique des solutions multicellulaires. Pour cette raison on ne consid rera que les résultats correspondant à des solutions monocellulaires ($n=0$).

La figue 2 montre l'évolution du nombre de Rayleigh

critique R_{TC} en fonction de Le pour différentes valeurs de Da dans le cas d'un mode d'écoulement monocellulaire ($n=0$). On peut voir que R_{TC} tend vers $+\infty$ quand Le tend vers 1. Ceci résulte de l'inexistence de solution convective stationnaire pour $Le=1$. Numériquement, il a été bien vérifié que pour $Le=1$ la solution converge toujours vers l'état de repos, et ce, indépendamment de R_T et de la perturbation initiale. Ce résultat est en accord avec les constatations de Trevisan et Bejan [1] et Gobin et Bennacer [3] qui ont travaillé respectivement sur des couches verticales poreuses et fluides. On peut remarquer aussi que pour des valeurs données de Da et R_T , il existe une gamme de Le telle que $Le_{cr\ min} < Le < Le_{cr\ max}$, pour laquelle il n'y a pas de solution convective. Les valeurs de $Le_{cr\ min}$ et $Le_{cr\ max}$ ($Le_{cr\ min} < 1 < Le_{cr\ max}$) sont déterminées par la résolution de l'équation (36) (avec $Le_{cr\ min} = 0$ si $R_T < R_{TC}(Le=0)$). Le nombre de Rayleigh critique R_{TC} augmente de façon monotone avec Da et sa variation devient linéaire pour Da élevé: ($R_{TC} = R_{TFC} Da$). Ainsi, pour des valeurs données de Le et R_T il existe une valeur critique de Da au delà de laquelle il n'y a pas de solution convective (i.e. au delà de laquelle R_T devient inférieur à R_{TC}). Quand $Le \rightarrow 0$, R_{TC} tend asymptotiquement vers la valeur:

$$R_{TC} = \frac{2\omega^2 \sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2}. \quad (61)$$

Quand $Le \rightarrow +\infty$, on obtient:

$$R_{TC} = \frac{2\omega^2 \sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2 Le} = \frac{R_{TC}(Le=0)}{Le}. \quad (62)$$

Pour $Da \approx 0$, on trouve que $R_{TC}(Le=0) \approx 21.92$. Pour le milieu fluide (Da élevé), $R_{TFC}(Le=0) \approx 1204.9$. Les expressions asymptotiques (61) et (62) peuvent être utilisées pour déterminer les nombres de Rayleigh critiques respectivement pour $Le \leq 0.1$ et $Le \geq 10$ avec une erreur inférieure à 2%.

La transition entre le régime diffusif pur et le régime convectif au sein d'une cellule soumise à des forces de volume solutale et thermique égales et opposées a été étudiée dans le passé par différents auteurs [2, 20–22] sur la base de la stabilité linéaire. Dans ces études les parois verticales des cellules étaient maintenues à des températures et des concentrations constantes et différentes. Dans le cas d'une matrice poreuse de Darcy d'extension infinie, il a été trouvé par Charrier-Mojtabi et al. [2] et Mamou et al. [20] que le nombre de Rayleigh super-critique R_{TC}^{sup} , marquant la naissance de la convection, était donné par le groupement $R_{TC}^{sup}|1-Le| = 105.3$. Dans le cas d'une couche fluide d'extension infinie, les valeurs $R_{TFC}^{sup}|1-Le| = 6509, 6511$ et 6620 ont été obtenues respectivement par Xin et al. [21], Mamou et al. [22] et Ghorayeb et Mojtabi [23]. Récemment Mamou et al. [24] ont étudié la stabilité d'une couche poreuse de Brinkman soumise à des conditions aux frontières de type Dirichlet

et Neuman. Les cas limites de milieux fluides et poreux ont été considérés par ces auteurs.

Le nombre de Rayleigh critique R_{TC}^{sup} , prédit par la théorie linéaire, fournit la limite au delà de laquelle le régime de double diffusion pure devient instable quelle que soit l'amplitude de la perturbation. D'un autre côté, le nombre de Rayleigh critique prédit par la théorie (non linéaire) de l'écoulement parallèle correspond en fait à un nombre de Rayleigh sous critique. Ainsi, pour $R_{TC} \leq R_T \leq R_{TC}^{sup}$, il existe deux solutions stables; une solution convective et la solution conductive. L'obtention de la solution convective nécessite un choix approprié de la perturbation initiale. Lorsque $R_T \geq R_{TC}^{sup}$, seule une solution convective existe, qui correspond à celle prédite par la présente théorie, lorsque l'hypothèse de l'écoulement de type parallèle est satisfaite.

5.2. Effet du rapport de forme

L'hypothèse d'un écoulement parallèle n'est vérifiée que lorsque le rapport de forme de la couche poreuse est suffisamment grand de façon à rendre les effets des parois horizontales négligeables [25]. Des tests numériques ont été effectués en résolvant les équations du problème dans leur intégralité pour étudier l'influence du rapport de forme A sur la condition du parallélisme de l'écoulement. En examinant l'évolution du rapport des nombres de Nusselt numérique et analytique Nu/Nu_a (qui doit valoir 1 pour un écoulement parallèle) en fonction de A (résultats non présentés ici), il a été établi que le rapport Nu/Nu_a devient constant à partir d'une certaine valeur du rapport de forme qui dépend des paramètres du problème. A titre indicatif, pour $R_T = 50$, $Da = 0.01$ et $Le = 10$ le rapport Nu/Nu_a devient indépendant de A pour $A \geq 2$. Alors que pour $R_T = 200$, $Da = 10^{-3}$ et $Le = 20$, un rapport de forme $A \geq 10$ est nécessaire pour retrouver numériquement le résultat analytique. D'une façon générale, on a trouvé que la valeur de A permettant de satisfaire la condition du parallélisme de l'écoulement, augmente quand R_T augmente ou Da diminue. Quant à l'augmentation de Le , elle engendre une augmentation de A pour $Le > 1$ et une diminution de A pour $Le < 1$ (voir ultérieurement le sens de l'intensification de l'écoulement avec Le).

Pour illustrer l'influence du rapport de forme sur les champs d'écoulement, de température et de concentration, on présente sur la figure 3 les lignes de courant, les isothermes et les lignes de concentration pour $R_T = 200$, $Da = 10^{-3}$, $Le = 20$ et différentes valeurs de A ($A = 2, 4$ et 10). Pour $A = 2$, la figure 3(a) montre que l'écoulement présente une inclinaison par rapport à la verticale dans la région centrale de la cavité indiquant ainsi que la composante horizontale de la vitesse n'est pas nulle. Cette inclinaison devient de moins en moins visible à mesure que A augmente (figure 3(b) et (c)). De plus, l'écoulement horizontal ayant lieu dans les parties inférieure et supé-

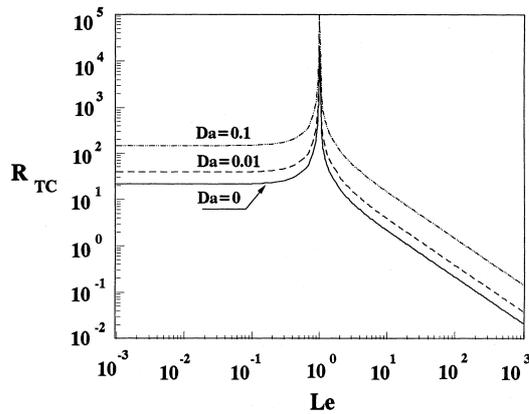


Fig. 2. Effet de Le sur le nombre de Rayleigh critique pour différents Da et $n=0$ (mode unicellulaire).

ieure de la cavité occup plus de la moitié de la couche poreuse pour $A=2$. L'augmentation de A tend à rendre négligeable la portion occupée par cet écoulement. Rappelons que l'hypothèse d'un écoulement parallèle se traduit dans les calculs analytiques par une composante transversale de la vitesse égale à zéro, ce qui signifie l'absence totale de l'écoulement horizontal dans le coeur de la cavité. On peut voir aussi que le champ de température présente, pour toutes les valeurs de A considérées, une stratification linéaire (i.e. gradient vertical constant) au milieu de la couche poreuse. Par contre, pour le champ de concentration, la stratification ne se manifeste que pour $A=10$. En fait pour $Le=20$, le coefficient de diffusion thermique est nettement supérieur au coefficient de diffusion massique. Le champ de concentration est donc le plus influencé par les effets convectifs et par là il est plus affecté par les anomalies que présente l'écoulement pour des faibles valeurs A . Tous les résultats numériques présentés dans cette étude ont été obtenus avec un rapport de forme $A=10$. Pour un tel rapport d'aspect les résultats numériques indiquent que les nombres de Nusselt et de Sherwood, sont indépendants de l'altitude, en accord avec les prédictions théoriques [équations (8) et (9)].

5.3. Influence de R_T

Les évolutions de Ψ_{ext} , Nu et Sh (correspondant aux solutions convectives) en fonction de R_T sont présentées sur les figures 4(a-c) pour $Le=10$ et $Da=10^{-3}$ et 10^{-1} . Les solutions convectives, comme le montrent ces figures, ne peuvent être obtenues que pour $R_T \geq 2.65$ pour $Da=10^{-3}$ et $R_T \geq 15.25$ pour $Da=10^{-1}$. On voit aussi que deux solutions convectives sont possibles pour $R_T > R_{TC}$; l'une correspondant à $\Psi_{c,max}$ et l'autre à $\Psi_{c,min}$. Pour les deux solutions, Ψ_{ext} est positif ce qui signifie que les mouvements de recirculation correspondants se font dans le sens trigonométrique. La solution correspondant à

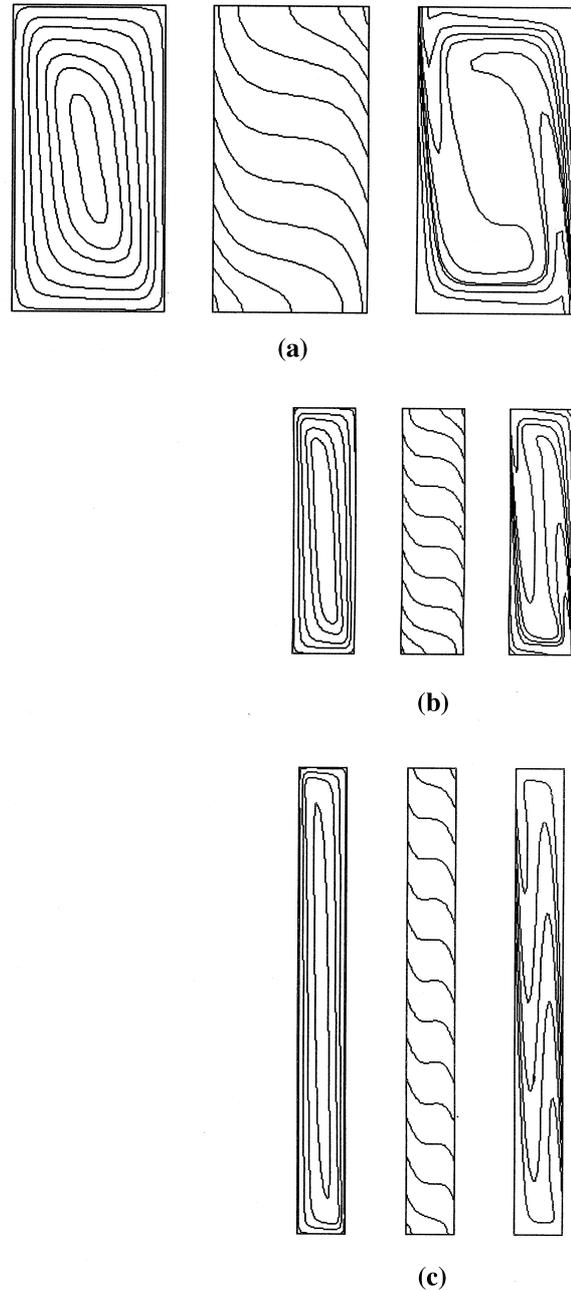


Fig. 3. Lignes de courant, isothermes et lignes de concentration pour $R_T=200$, $Le=20$ et $Da=0.001$: (a) $A=2$; (b) $A=4$; et (c) $A=10$.

$\Psi_{c,max}$ montre une augmentation de Ψ_{ext} , Nu et Sh avec R_T , alors que l'autre solution montre le contraire avec une tendance à ramener l'écoulement vers le repos ($\Psi_{ext} \rightarrow 0$, $Nu \rightarrow 1$ et $Sh \rightarrow 1$) quand $R_T \rightarrow +\infty$. On voit aussi que les résultats numériques concordent bien avec la solution correspondant à $\Psi_{c,max}$. L'autre solution n'a

pas pu être obtenue numériquement même avec l'utilisation de la solution analytique comme condition initiale. Une analyse de stabilité montrerait probablement que la branche de la solution correspondant à $\Psi_{c\min}$ est instable. Quand le nombre de R_T devient suffisamment élevé l'intensité de l'écoulement augmente d'une façon monotone avec R_T , alors que Nu et Sh présentent un comportement asymptotique. En fait pour R_T élevé, Ψ_{ext} correspondant à $\Psi_{c\min}$ devient:

$$\Psi_{\text{ext}} = (1 - \alpha_0)\Psi_{c\min} = (1 - \alpha_0) \frac{\omega^2}{\alpha_2(Le^2 - 1)} R_T^{-1}$$

donc Ψ_{ext} et $\Psi_{c\min}$ tendent vers 0 ($Nu \rightarrow 1$ et $Sh \rightarrow 1$) quand $R_T \rightarrow +\infty$. Pour la solution correspondant à $\Psi_{c\max}$ on a:

$$\Psi_{\text{ext}} = (1 - \alpha_0)\Psi_{c\max} = (1 - \alpha_0) \left[\frac{\alpha_2(Le^2 - 1)}{\alpha_1^2 \omega^2 Le^2} \right]^{1/3} R_T^{1/3}$$

Ψ_{ext} et $\Psi_{c\max}$ tendent vers $+\infty$ quand $R_T \rightarrow +\infty$, donc selon les relations (38) et (39), Nu et Sh ne dépendent que de Da :

$$Nu = Sh = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2^2}$$

En fait quand $\Psi_c \rightarrow +\infty$, on peut vérifier que:

$$C_T \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad C_S \rightarrow 0$$

$$C_T \Psi_c = Le C_S \Psi_c = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Ainsi, les profils horizontaux de température et de concentration deviennent identiques et indépendants de Le et R_T . L'évolution de Nu ($Sh = Nu$) en fonction de Da dans ce cas limite est montrée sur la figure 5. Quand $Da \rightarrow 0$, Nu tend asymptotiquement vers la valeur 5.279 qui a été trouvée par Mamou et al. [20] dans le cas du modèle de Darcy. Quand Da augmente, Nu diminue et tend asymptotiquement vers 3.229. Cette valeur correspondant au milieu fluide est en accord avec les résultats de Mamou et al. [18].

Par ailleurs la relation (26), montre que les nombres de R_T et Le n'influencent le champ de vitesse que par l'intermédiaire de la constante Ψ_c . Il s'ensuit que l'augmentation de R_T et par là celle de Ψ_c (on s'intéresse à $\Psi_c = \Psi_{c\max}$) intensifie l'écoulement sans changer la distribution de vitesse (le rapport des vitesses en deux positions différentes est indépendant de Ψ_c). Ce qui implique l'impossibilité d'obtention des profils de couche limite dans ce problème. Signalons que dans le cas où les convections thermique et massique coopèrent, Alavyoon [8] et Mamou et al. [11,18] ont montré qu'un comportement de type couche limite se manifeste quand le nombre de Rayleigh devient assez élevé. Dans cette étude Nu et Sh augmentent indéfiniment avec le nombre de Rayleigh. Cependant, quand les effets thermiques et massiques sont opposés, il existe des situations où les profils de vitesse ne peuvent pas être de type couche limite et ce, indépendamment du nombre de Rayleigh.

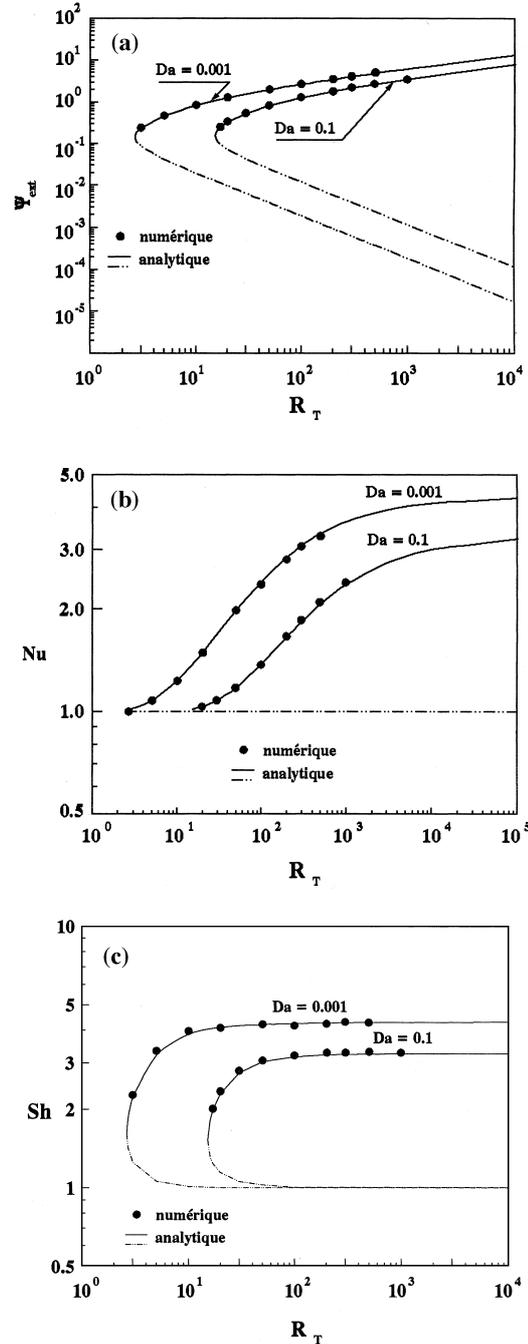


Fig. 4. Effet de R_T pour $Le = 10$ et $Da = 0.001$ et 0.1 : (a) intensité de l'écoulement; (b) nombre de Nusselt; et (c) nombre de Sherwood.

5.4. Evolution des valeurs critiques

Sur les figures 6(a) et (b), on montre l'évolution de $\Psi_{\text{ext,cr}}$, Nu_{cr} et Sh_{cr} (pour un écoulement monocellulaire

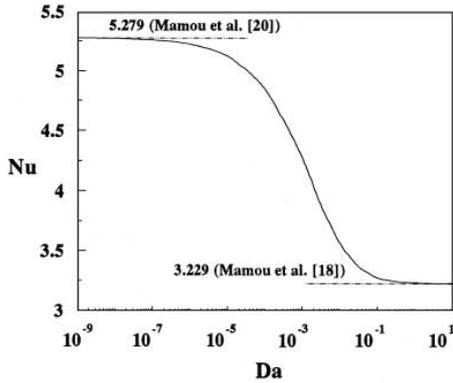


Fig. 5. Variation du nombre de Nusselt en fonction de Da pour $R_T = +\infty$.

$\Psi_{\text{ext}} = \Psi(x=0) = \Psi_c(1 - \alpha_0)$ et il est de même signe que Ψ_c en fonction de Le pour différentes valeurs de Da et pour $R_T = R_{TC}$. Pour cette valeur de R_T on a une seule solution convective (i.e. $\Psi_{c \text{ max}} = \Psi_{c \text{ min}}$). On voit que ces quantités varient très peu avec Da . Pour Le voisin de 0 où les écarts enregistrés sont les plus importants, les variations de Ψ_{extcr} et Nu_{cr} restent de l'ordre de 12% quand Da passe de 0 à $+\infty$. On note aussi des comportements asymptotiques pour ces caractéristiques quand Le tend vers 0 ou vers $+\infty$. En fait, selon la relation (37), quand $Le \rightarrow 0$, on obtient:

$$\Psi_{\text{cr}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$$

$$\Psi_{\text{extcr}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}(1 - \alpha_0).$$

En remplaçant Ψ_{cr} par son expression dans les relations (38) et (39), on obtient:

$$Nu_{\text{cr}} = \frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$Sh_{\text{cr}} = 1.$$

La limite $Le \rightarrow +\infty$ donne:

$$\Psi_{\text{cr}} = \frac{1}{Le\sqrt{\alpha_1}}$$

$$\Psi_{\text{extcr}} = \frac{1}{Le\sqrt{\alpha_1}}(1 - \alpha_0).$$

Ainsi, Ψ_{cr} et Ψ_{extcr} tendent vers 0, $Nu_{\text{cr}} \rightarrow 1$ et $Sh_{\text{cr}} \rightarrow Nu_{\text{cr}}(Le \rightarrow 0)$. On peut noter aussi que lorsque Da augmente (R_{TC} augmente avec Da), il engendre une augmentation de l'intensité de l'écoulement mais une diminution de Nu_{cr} et Sh_{cr} . Cela peut s'expliquer par le fait que lorsque Da diminue le maximum de vitesse s'approche des parois actives. On assiste ainsi à une intensification de l'écoulement aux voisinages de celles-ci quand Da diminue bien que l'intensité globale de l'écoulement diminue, ce qui favorise les transferts convectifs. Quand

$Le \rightarrow 1$, $R_{TC} \rightarrow +\infty$, cependant l'intensité de l'écoulement reste finie et on a:

$$|\Psi_{\text{extcr}}| = \frac{1}{\sqrt{3\alpha_1}}(1 - \alpha_0).$$

La discontinuité de Ψ_{extcr} au voisinage de $Le = 1$ est due tout simplement au changement de sens du mouvement du fluide avec le signe de $(Le^2 - 1)$. Cette discontinuité n'affecte pas Nu_{cr} et Sh_{cr} car l'intensité de l'écoulement ($|\Psi_{\text{extcr}}|$) est continue.

5.5. Effet du nombre de Lewis Le

L'effet de Le sur l'écoulement du fluide et les transferts de chaleur et de masse est illustré sur les figures 7(a–c) pour $R_T = 100$ et $Da = 10^{-3}$ et 10^{-1} . Pour $Da = 10^{-3}$, on note l'absence de la solution convective pour $0.80 < Le < 1.20$ (la gamme de Le pour laquelle $R_{TC} > R_T = 100$). Pour $Da = 10^{-1}$, cette gamme de Le s'élargit pour devenir $0 \leq Le < 2.19$. On constate un bon accord entre la solution numérique et la solution analytique correspondant à $\Psi_c = \Psi_{c \text{ max}}$. Ψ_{ext} , Nu et Sh présentent des comportements asymptotiques quand Le tend vers 0 ou $+\infty$. En fait pour $Le \rightarrow 0$, on trouve d'après l'équation (35):

$$\Psi_{c \text{ max}} = \frac{-\alpha_2 R_T / \omega^2 - \left[\left(\frac{\alpha_2 R_T}{\omega^2} \right)^2 - 4\alpha_1 \right]^{1/2}}{2\alpha_1}$$

$$\Psi_{c \text{ min}} = \frac{-\alpha_2 R_T / \omega^2 + \left[\left(\frac{\alpha_2 R_T}{\omega^2} \right)^2 - 4\alpha_1 \right]^{1/2}}{2\alpha_1}.$$

Donc Ψ_{ext} , Nu et Sh deviennent indépendants de Le et la relation (39) montre bien que $Sh \rightarrow 1$ quand $Le \rightarrow 0$. La figure 7(c) montre que pour $Le < 1$ il existe une valeur de Le pour laquelle Sh passe par un maximum lorsque la solution convective existe (i.e. $R_T > R_{TC}(Le = 0)$). Pour $Le \rightarrow +\infty$, on a:

$$\Psi_{c \text{ min}} = \frac{\omega^2}{\alpha_2 R_T Le^2}.$$

Ainsi, $\Psi_{c \text{ min}} \rightarrow 0$ et Nu et Sh correspondants tendent vers 1. $\Psi_{c \text{ max}}$ vérifie la relation:

$$\alpha_1^2 \Psi_{c \text{ max}}^3 + \alpha_1 \Psi_{c \text{ max}} - \frac{\alpha_2 R_T}{\omega^2} = 0.$$

L'évolution de Ψ_{ext} (figure 7(a)) (pour la solution correspondant à $\Psi_c = \Psi_{c \text{ max}}$ qu'on peut obtenir numériquement), montre que l'intensité de l'écoulement ($|\Psi_{\text{ext}}|$) augmente avec Le quand $Le > 1$ et varie dans le sens contraire de Le quand $Le < 1$. Ce qui peut bien expliquer les résultats exposés au début concernant le rapport de forme. La chute de Sh vers 1 quand $Le \rightarrow 0$ s'explique par le fait que le coefficient de diffusion massique devient important et le champ de concentration se trouve dominé

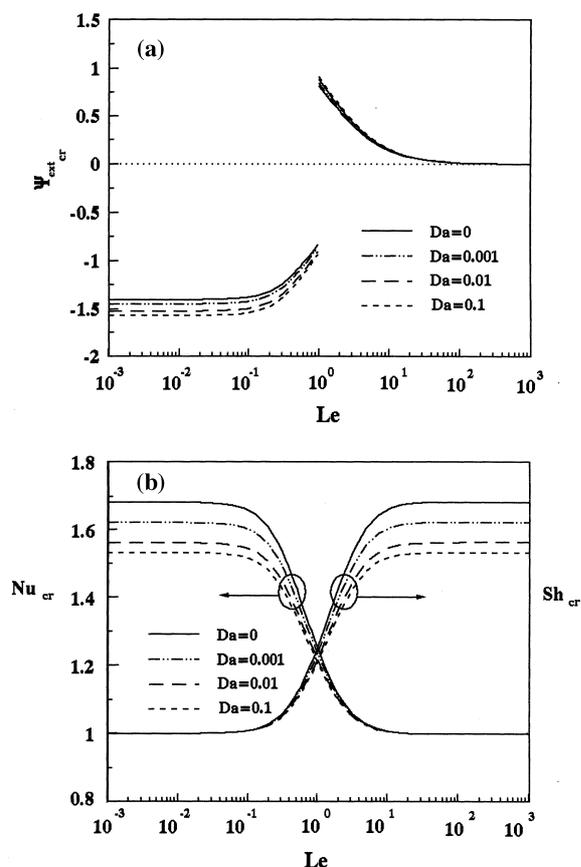


Fig. 6. Variations des valeurs critiques correspondant à $R_T = R_{TC}$ en fonction de Le pour différents Da : (a) Ψ_{ext} ; et (b) Nu et Sh .

par les effets diffusifs. La figure 7(a) montre aussi que pour $Le > 1$; $\Psi_{ext} > 0$, ce qui implique que la cellule de recirculation tourne dans le sens trigonométrique. Pour $Le < 1$; $\Psi_{ext} < 0$ et le sens du mouvement s'inverse. Selon les conditions de la figure 1, la chaleur et la matière sont introduites du côté droit (paroi verticale droite). Donc la convection thermique a tendance à diminuer la masse volumique du fluide situé au voisinage de la paroi droite ($\beta_T > 0$) pour créer un mouvement dans le sens trigonométrique. Pour que les forces de convection massique produisent un effet opposé (i.e. tendent à augmenter la masse volumique du fluide avoisinant la paroi droite pour induire un mouvement dans le sens horaire), il faut avoir $\beta_S < 0$. Si $\beta_S > 0$, alors le flux de masse doit être introduit du côté gauche. Pour faciliter la discussion, nous avons adopté la première situation ($\beta_S < 0$). En fait pour $Le > 1$, on peut montrer à partir des relations (14) et (15) que le gradient horizontal de température est supérieur au gradient de concentration:

$$\frac{dT}{dx} - \frac{dS}{dx} > 0.$$

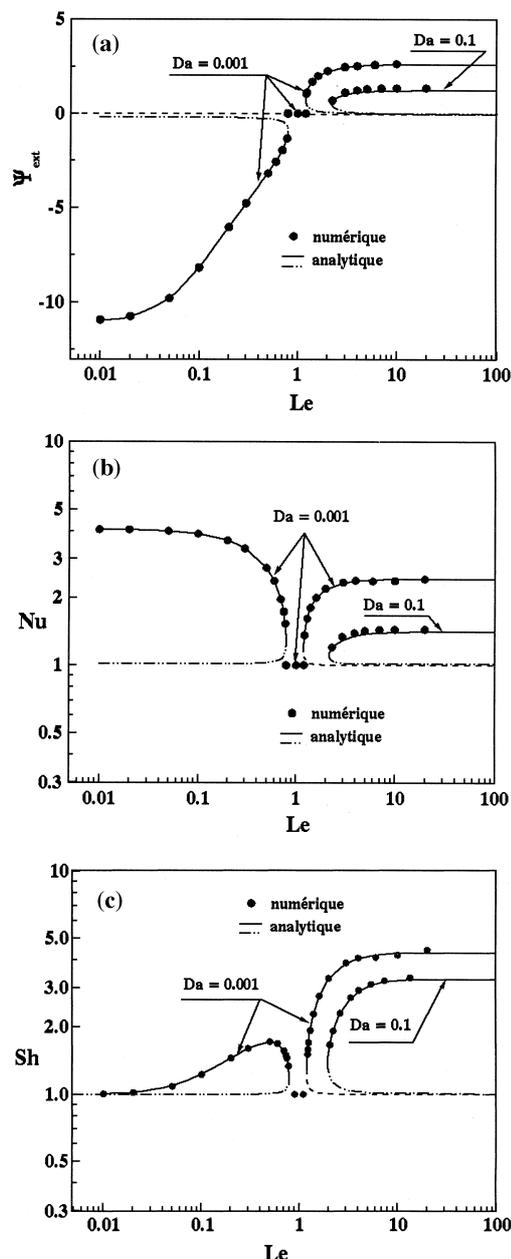


Fig. 7. Effet de Le pour $R_T = 100$ et $Da = 0.001$ et 0.1 : (a) intensité de l'écoulement; (b) nombre de Nusselt; et (c) nombre de Sherwood.

La masse volumique du fluide (caractérisée par $\rho_a = S - T$) diminue ainsi quand x augmente, et le fluide le moins dense se situe dans la partie droite de la cavité. Cela implique que les effets thermiques l'emportent sur les effets massiques pour $Le > 1$ et justifie le fait que le mouvement de recirculation est dans le sens trigonométrique dans ce cas. De la même façon on peut montrer que les effets massiques sont plus importants pour $Le < 1$

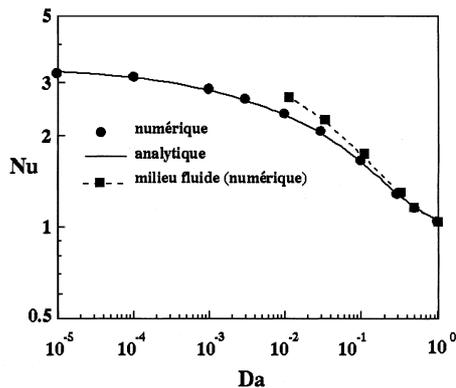


Fig. 8. Variations de Nu en fonction de Da pour $R_T=200$ et $Le=10$.

et le sens du mouvement de recirculation s'inverse. L'étude numérique effectuée par Mamou et al. [10], dans le cas d'une cavité carrée dont les faces verticales sont soumises à des flux de chaleur et de masse uniformes, montre que pour $N = -1$ et $Le = 10$, l'écoulement est imposé par les forces de convection thermique. La même constatation a été faite par Shyy et Chen [4] dans le cas d'une cavité carrée remplie d'un fluide ($N = -1$ et $Le = 6.71$).

Les relations (14) et (15) montrent aussi qu'à l'intérieur du domaine ($\alpha_2 > 0$ pour un écoulement monocellulaire) on a :

$$\frac{d\theta_s}{dx} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_T}{dx} < 1.$$

Donc ces relations traduisent le fait que les flux de chaleur et de masse imposés au niveau de la frontière (et qui valent 1) se divisent à l'intérieur du domaine en des portions de conduction ($d\theta_s/dx$ et $d\theta_T/dx$) et des portions de convection ($C_T\Psi$ et $C_T Le \Psi$). Pour $Le > 1$ par exemple, les effets diffusifs sont plus importants dans le cas du champ thermique, donc $d\theta_T/dx$ est plus proche de l'unité (sa valeur pour la diffusion pure) que $d\theta_s/dx$. C'est ainsi que le gradient horizontal de température devient supérieur au gradient horizontal de concentration pour $Le > 1$.

5.6. Effet du nombre de Darcy Da

La figure 8 montre l'influence de Da sur le nombre de Nusselt pour $R_T=200$ et $Le=10$. On observe une diminution de Nu quand Da augmente. En fait, en passant de $Da=0$ à $Da=1$, la valeur de Nu est presque divisée par 3. Les variations de Ψ_{ext} et Sh en fonction de Da (non présentées ici) montrent une tendance similaire à celle de Nu . De plus il a été constaté que l'effet de Da est plus marqué pour Ψ_{ext} . En effet, pour $Da=1$, l'intensité de l'écoulement, comparée à celle obtenue pour $Da=0$, est réduite de presque neuf fois. La diminution du transfert de chaleur et de l'intensité de l'écoulement avec Da a été

également mise en évidence par Lauriat et Prasad [13] et Vasseur et Robillard [14] dans le cas de la convection thermique pure. Sur la figure 8 sont également présentés les résultats correspondant à un milieu purement fluide. Ces résultats sont obtenus numériquement par la résolution des équations (54), (57)–(60) (avec $\varepsilon=1$) qui régissent le milieu fluide (avec $Pr=1$). Les résultats obtenus avec le modèle de Brinkman s'approchent de ceux d'un milieu fluide à mesure que Da augmente et ils coïncident lorsque $Da \geq 0.3$.

Rappelons que les résultats du milieu fluide sont indépendants du nombre de Pr tant que la condition de l'écoulement parallèle reste satisfaite. Une étude détaillée de l'influence de Pr sur les résultats du milieu fluide quand R_T et Le varient n'est pas l'objet du présent travail. Néanmoins, pour $R_T=200$, $Le=10$ et $Da=0.5$, nous avons trouvé que pour $Pr \geq 0.5$, les résultats du milieu fluide sont presque indépendants de Pr et concordent bien avec ceux du modèle de Brinkman. Cependant, pour des valeurs de Pr en dessous de cette limite, la divergence entre les deux résultats s'accroît de plus en plus à mesure que Pr diminue. Pour $Pr=0.03$ par exemple, la structure des lignes de courant obtenues numériquement (mais non présentées ici) a montré que l'hypothèse de l'écoulement parallèle n'est plus valable. On a observé, pour $A=8$, l'apparition de trois petites cellules de recirculation identiques au sein de l'écoulement et disposées de manière à former une structure périodique dans la direction verticale. Pour des valeurs supérieures de A , l'écoulement ne présente pas une structure de type écoulement parallèle. Le désaccord observé entre les résultats numériques du modèle de Brinkman et ceux du milieu fluide pour les faibles valeurs de Pr est conforme aux observations de Lauriat et Prasad [13] qui indiquent que le modèle de Brinkman n'est pas valide pour des valeurs de Pr relativement faibles.

5.7. Analyse de la masse volumique du fluide

Selon Alavyoon et al. [9], seules les solutions analytiques vérifiant $C_\rho = C_S - C_T < 0$ (C_ρ caractérise le gradient vertical de la masse volumique) peuvent être en accord avec les solutions numériques. Cela implique que la masse volumique du fluide dans le milieu poreux doit diminuer dans la direction ascendante. Dans la présente étude nous avons trouvé que les résultats analytiques et numériques concordent bien indépendamment du signe de C_ρ ; c'est-à-dire même pour une masse volumique du fluide augmentant dans la direction ascendante. En fait, pour des valeurs données de R_T et Da , on peut montrer à partir des relations (31) et (32) que lorsque $Le \rightarrow 0$, $C_S \rightarrow 0$ et C_T tend vers une constante négative. Donc, il existe une valeur de Le au dessous de laquelle $C_\rho > 0$. Par ailleurs, si on fixe le nombre de Rayleigh solutal $R_S = R_T Le$, on montre que lorsque $Le \rightarrow +\infty$, le produit $\Psi_{c \max} Le$ tend vers une constante positive (et $\Psi_{c \max} \rightarrow 0$) donc C_ρ tend

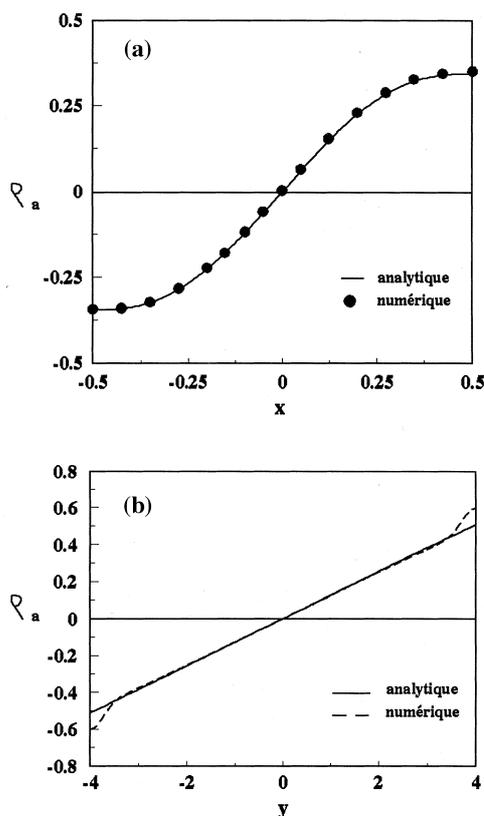


Fig. 9. Profils de ρ_a pour $R_T=100$, $Le=0.01$ et $Da=0.01$: (a) profil horizontal; et (b) profil vertical.

vers une constante positive d'après les relations (31) et (32) (i.e. pour une valeur donnée de R_S , il existe une valeur de Le fonction de Da , au delà de laquelle $C_p > 0$).

Sur les figures 9(a) et (b) nous avons tracé les profils horizontaux et verticaux de ρ_a pour $R_T=100$, $Da=0.01$ et $Le=0.01$ ($C_p=0.13$). Le paramètre $\rho_a=S-T$ caractérise la variation spatiale de ρ .

Le profil horizontal de ρ_a (Fig. 9(a)) montre une augmentation de ce paramètre avec x ce qui implique que les effets massiques l'emportent sur les effets thermiques et le mouvement du fluide se fait dans le sens horaire comme discuté antérieurement pour $Le < 1$. L'accord est excellent entre les résultats analytiques et numériques. Le profil vertical (figure 9(b)) montre que la masse volumique augmente avec y et les résultats numériques sont en accords avec les calculs analytiques, sauf dans le voisinage immédiat des parois horizontales où l'hypothèse de l'écoulement parallèle n'est pas valable.

Par ailleurs, il faut signaler que la diminution de la masse volumique dans la direction ascendante n'est pas une condition à satisfaire chaque fois pour obtenir une solution physique. En fait, si l'on considère le cas de la convection naturelle thermique pure, cette condition est fréquemment non vérifiée dans les configurations où le

chauffage est effectué par le bas. Il est vrai que dans la configuration considérée ici (i.e. parois verticales actives) cette condition doit être satisfaite dans le cas où les mouvements convectifs sont dus à un gradient de température seul, à un gradient de concentration seul ou même à des gradients combinés de température et de concentration qui coopèrent. Si, par exemple, on supprime le flux de chaleur dans la présente configuration, le fluide situé dans la moitié droite de la cavité, étant exposé à un flux de masse, se trouve plus concentré donc plus dense (car $\beta_S < 0$), alors son mouvement sera descendant (le fluide situé dans la moitié gauche, étant plus léger, aura un mouvement ascendant). De plus, sa concentration (et par là sa masse volumique) augmente en descendant puisqu'il est toujours exposé au flux de masse (la concentration du fluide montant, qui subit une extraction de masse, diminue). C'est ainsi que la masse volumique du fluide diminue dans la direction ascendante. Le même raisonnement s'applique à un flux de chaleur seul. Maintenant considérons la présente situation où les flux de chaleur et de masse coexistent et prenons par exemple un cas correspondant à $Le < 1$, où le mouvement du fluide se fait dans le sens horaire. Le fluide descendant (fluide situé dans le côté droit), étant exposé à des flux de chaleur et de masse, s'échauffe et se concentre. L'augmentation de concentration (la composante qui a imposé le sens du mouvement du fluide) a tendance à augmenter sa masse volumique et l'augmentation de la température (la composante qui s'oppose au mouvement créé) a tendance à la diminuer. La composante qui va l'emporter est celle possédant le gradient vertical le plus important. Si on prend le cas de $Le \rightarrow 0$, le gradient vertical de concentration devient négligeable ($C_S \rightarrow 0$) et le gradient vertical de température devient dominant et entraîne une diminution de la masse volumique dans la direction descendante.

6. Conclusion

Dans ce travail, nous avons utilisé le modèle de Brinkman pour étudier analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale induite dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. On s'est intéressé particulièrement au cas où les forces de volume thermiques et solutales sont opposées et de même intensité. La solution analytique développée est basée sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle dans la région centrale de la cavité. Elle a conduit à des résultats qui concordent bien avec ceux obtenus numériquement quand le rapport de forme de la matrice poreuse est suffisamment élevé. Le nombre de Rayleigh R_{TC} , déterminé analytiquement en fonction de Le et Da , correspond au nombre de Rayleigh sous critique à partir duquel des solutions convectives de type écoulement parallèle existent. Dans la gamme $R_{TC} \leq R_T \leq R_{TC}^{sup}$, il existe

deux solutions stables, la solution de double diffusion pure et une solution convective sous-critique. Lorsque $R_T \geq R_{TC}^{sup}$ prédit par la théorie linéaire (voir réf. [24] et [26]) pour l'étude de la stabilité de la solution de double diffusion pure, cette dernière solution devient instable. Il a été trouvé que R_{TC} augmente lorsque Da augmente ou lorsque Le tend vers l'unité (par valeurs inférieures ou supérieures). L'augmentation de Da induit une diminution de l'intensité de l'écoulement et des transferts thermiques et massiques. Quand R_T augmente, l'intensité de l'écoulement augmente d'une façon monotone. Cependant, les nombres de Nusselt et de Sherwood tendent asymptotiquement vers une même valeur indépendante de Le et qui diminue avec Da . La solution développée tend vers celle correspondant au modèle de Darcy quand $Da \rightarrow 0$. Les résultats du milieu fluide ont été également obtenus à partir de la présente solution pour des nombres de Darcy et de Prandtl suffisamment élevés.

References

- [1] O.V. Trevisan, A. Bejan, Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 28 (1985) 1597–1611.
- [2] M.C. Charrier-Mojtabi, M. Karimi-Fard, A. Mojtabi, Naissance de régimes de convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse, *C.R. Acad. Sci. t. 324* (1997) 9–17 Paris.
- [3] D. Gobin, R. Bennacer, Double diffusion in a vertical fluid layer: onset of the convection regime, *Phys. Fluids* 6 (1) (1994) 59–67.
- [4] W. Shyy, M.H. Chen, Double diffusive flow in enclosures, *Phys. Fluids A* 3 (11) (1991) 2592–2607.
- [5] O.V. Trevisan, A. Bejan, Mass and heat transfer by natural convection in a vertical slot filled with porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 29 (1986) 403–415.
- [6] O.V. Trevisan, A. Bejan, Mass and heat transfer by high Rayleigh number convection in a porous medium heated from below, *Int. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 2341–2356.
- [7] N.D. Rosenberg, F.J. Spera, Thermohaline convection in a porous medium heated from below, *Int. J. Heat Mass Transfer* 35 (1992) 1261–1273.
- [8] F. Alavyoon, On natural convection in vertical porous enclosures due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries, *Int. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 2479–2498.
- [9] F. Alavyoon, Y. Masuda, S. Kimura, On natural convection in vertical porous enclosures due to opposing fluxes of heat and mass prescribed at the vertical walls, *Int. J. Heat Mass Transfer* 37 (1994) 195–206.
- [10] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen, Multiple solutions for double-diffusive convection in a vertical porous enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* 38 (10) (1995) 1787–1798.
- [11] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen, D. Gobin, Double-diffusive convection in an inclined slot filled with porous medium, *Eur. J. Mech.* 14 (5) (1995) 629–652 B/Fluids.
- [12] T.W. Tong, E. Subramanian, A boundary layer analysis for natural convection in vertical porous enclosures—use of the Brinkman-extended Darcy model, *Int. J. Heat Mass Transfer* 28 (3) (1985) 563–571.
- [13] G. Lauriat, V. Prasad, Natural convection in a vertical porous cavity: a numerical study for Brinkman-extended Darcy formulation, *ASME J. Heat Transfer* 109 (1987) 688–696.
- [14] P. Vasseur, L. Robillard, The Brinkman model for boundary layer regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer* 30 (4) (1987) 717–727.
- [15] P. Vasseur, L. Robillard, The Brinkman model for natural convection in a porous layer: effects of nonuniform thermal gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 4199–4206.
- [16] B. Goyeau, J.P. Songbe, D. Gobin, Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy–Brinkman formulation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (7) (1996) 1363–1378.
- [17] D.E. Cormack, L.G. Leal, J. Imberger, Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls: Part 1, asymptotic theory, *J. Fluid Mech.* 65 (1974) 209–230.
- [18] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen, Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure, *Heat and Mass Transfer* 32 (1996) 115–125.
- [19] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen, Double diffusive convection instability in a vertical porous enclosure, *J. Fluid Mech.* sous presse (1998).
- [20] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen, A Galerkin finite-element study of the onset of double-diffusive convection in an inclined porous enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer* 41 (11) (1998) 1513–1529.
- [21] Xin S, Le Quéré P, Tuckerman L, (1996), Double diffusion in a square cavity: on the nature of the bifurcation at convection onset, *Notes et Documents LIMSI*, No. 96-07
- [22] M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen, Onset of double diffusive convection in a vertical fluid layer, *Third International Thermal Energy Congress*, Japan, 1997.
- [23] K. Ghorayeb, A. Mojtabi, Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity, *Phys. Fluids* 9 (8) (1997) 2339–2348.
- [24] M. Mamou, M. Hasnaoui, A. Amahmid, P. Vasseur, Stability analysis of double-diffusive convection in a vertical Brinkman porous enclosure, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 25 (4) (1998) 491–500.
- [25] P. Vasseur, M.G. Satish, L. Robillard, Natural convection in a thin, inclined porous layer exposed to a constant heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 537–549.
- [26] M. Marcoux, M. Karimi-Fard, M.C. Charrier-Mojtabi, Naissance de la convection thermosolutale dans une cellule rectangulaire poreuse soumise à des flux de chaleur et de masse, *8ème Journées Internationales de Thermiques*, Marseille, France 1 (1997) 383–392.